

第3讲二次函数与角度存在性

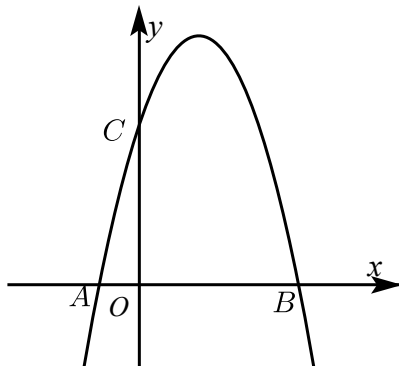
1. 定角问题

典题精练1

1. 抛物线 $C_1: y_1 = x^2 + 2x + c$ 的顶点为 P , 交 y 轴与点 C , 对称轴交 x 轴于点 D , 点 D 与点 P 不重合. 平移 C_1 使其经过点 C, D , 得抛物线 C_2 , 顶点为 M , 对称轴交 x 轴于点 D' .
 - (1) 当 $c = -5$ 时, 求点 P 和点 C 的坐标.
 - (2) 当 PM 与 x 轴的夹角为 45° 时, 求抛物线 C_2 的解析式.
 - (3) 设点 C 关于 D' 的对称点为 Q , 当 D 与 Q 不重合时, 求 D, Q 两点所在直线的解析式.

 典题精练2

2. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 4a$ 经过 $A(-1, 0)$ ， $C(0, 4)$ 两点，与 x 轴交于另一点 B 。



(1) 求抛物线的解析式。

(2) 已知点 $D(m, m+1)$ 在第一象限的抛物线上，连接 BD ，在抛物线上是否存在点 P 使得 $\angle DBP = 45^\circ$ ？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

3. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 经过点 $A(-2, 0)$ 点 $B(4, 0)$ 及点 $C(0, 4)$ ，连结 AC 、 BC 。

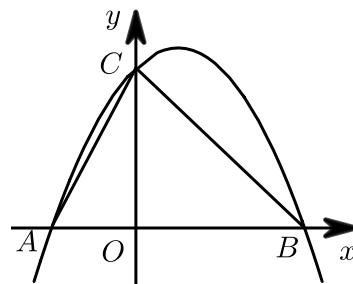


图 1

- (1) 求抛物线的函数解析式。
- (2) 点 P 是抛物线在第一象限内的一点，①当 $\triangle BCP$ 面积最大时，求点 P 的坐标。②当 $\angle PCA = 135^\circ$ 时，求点 P 的坐标。

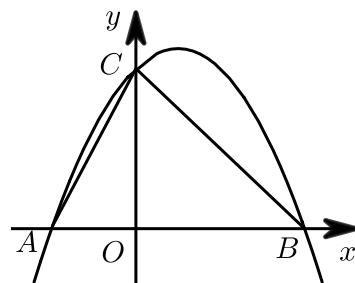
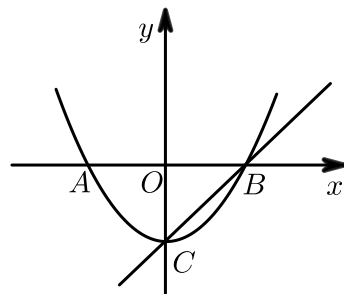


图 2

4. 如图，已知顶点为 $C(0, -3)$ 的抛物线 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 与 x 轴关于 A, B 两点，直线 $y = x + m$ 过顶点 C 和 B 。



- (1) 求点 B 的坐标。
- (2) 求二次函数 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 的解析式。
- (3) 抛物线 $y = ax^2 + b(a \neq 0)$ 上是否存在点 M ，使得 $\angle MCB = 15^\circ$ ？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。

经典再现

5. 在平面直角坐标系中，点 $O(0, 0)$ ，点 $A(1, 0)$ ，已知抛物线 $y = x^2 + mx - 2m$ ，（ m 是常数），顶点为 P 。
- (1) 当抛物线经过点 A 时，求顶点 P 的坐标。
 - (2) 若点 P 在 x 轴下方，当 $\angle AOP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式。
 - (3) 无论 m 取何值，该抛物线都经过定点 H ，当 $\angle AHP = 45^\circ$ 时，求抛物线的解析式。

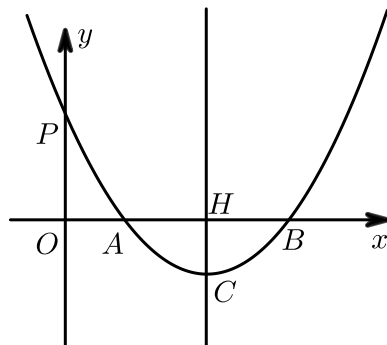
 典题精练3

6. 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 过点 $A(-6, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, -3)$.

(1) 求此抛物线的解析式.

(2) 若点 Q 在 y 轴上, 点 G 为该抛物线的顶点, 且 $\angle GQA = 45^\circ$, 求点 Q 的坐标.

7. 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = a(x-1)(x-5)$ ($a > 0$) 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于 P 点, 过其顶点 C 作直线 $CH \perp x$ 轴于点 H .



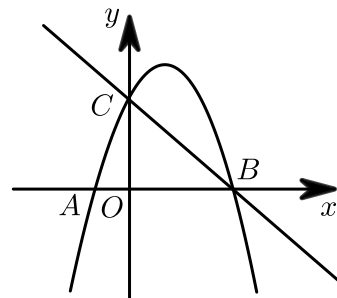
(1) 若 $P(0, 3)$, 请求出二次函数的解析式.

(2) 若 $\angle APB = 30^\circ$, 请求出满足条件的点 P 的坐标.

2. 等角问题

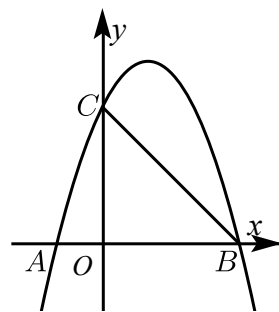
典题精练 I

8. 如图，已知二次函数 $y = -x^2 + bx + c$ 的图象经过点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 抛物线上是否存在点 P ，使 $\angle PAB = \angle ABC$ ，若存在请直接写出点 P 的坐标，若不存在，请说明理由。

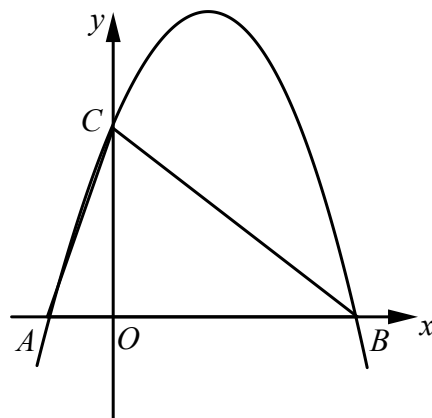
9. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + 3(a \neq 0)$ 与 x 轴分别交于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求抛物线的解析式 .
- (2) 设点 $D(2, m)$ 在第一象限的抛物线上，连接 BC ， BD . 试问，在对称轴左侧的抛物线上是否存在一点 P ，满足 $\angle PBC = \angle DBC$ ？如果存在，请求出点 P 的坐标；如果不存在，请说明理由 .

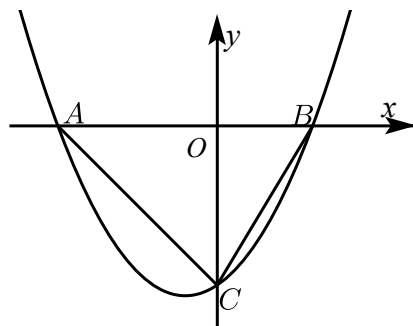
 典题精练2

10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴的两个交点分别为 $A(-1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ ，与 y 轴相交于点 C 。



- (1) 求抛物线的表达式。
- (2) 连接 AC 、 BC ，求 $\angle ACB$ 的正切值。
- (3) 点 P 在抛物线上，且 $\angle PAB = \angle ACB$ ，求点 P 的坐标。

11. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 5$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-5, 0)$ 和点 $B(3, 0)$ ，与 y 轴交于点 C 。



- (1) 求该抛物线的解析式及顶点坐标。
- (2) 若点 E 为 x 轴下方抛物线上的一动点，当 $S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC}$ 时，求点 E 的坐标。
- (3) 在 (2) 的条件下，抛物线上有一点，使 $\angle BAP = \angle CAE$ ，求出此时点 P 的横坐标。

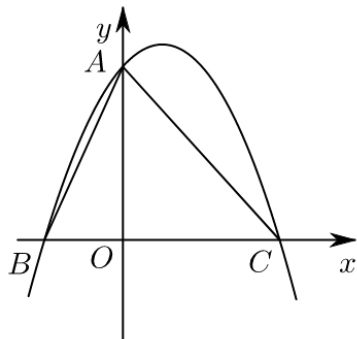
12. 已知二次函数 $y = -x^2 + bx + 3$ 的图象与 x 轴交于点 A, B (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .
- (1) 当 $b = 6$ 时, 求二次函数的最大值.
- (2) 当 $b = 2$ 时, 点 $P(0, t)$ ($t < -1$) 是 y 轴上的点, $Q(-5, 0)$, 将点 Q 绕点 P 顺时针旋转 90° 得到点 E , 点 E 恰好落在该二次函数的图象上, 求 t 的值.
- (3) M 是该二次函数图象上的一点, 在(2)的条件下, 连接 AD, AE, BC, CM , 使 $\angle DAE = \angle MCB$, 求点 M 的坐标.

 典题精练3

13. 已知抛物线 $y = x^2 - 2mx + 3m$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的右侧), 与 y 轴交于点 $C(0, -3)$, 顶点为 D .
- (1) 求该抛物线的解析式及顶点 D 的坐标.
- (2) 若此抛物线的对称轴上的点 P 满足 $\angle APB = \angle ACB$, 求点 P 的坐标.

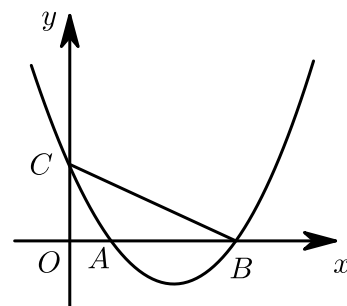
3. 和差角问题

14. 如图, 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 3$, 与 x 轴交于点 $B(-2, 0)$ 和 C , 与 y 轴交于点 A , 点 M 在 y 轴上.



- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 连接 BM 并延长, 交抛物线于 D , 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E . 当以 B, D, E 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似时, 求点 M 的坐标.
- (3) 连接 BM , 当 $\angle OMB + \angle OAB = \angle ACO$ 时, 求 AM 的长.

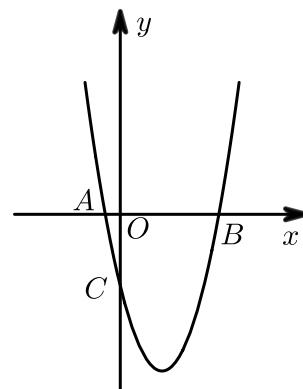
15. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 $A(1, 0)$ ， $B(4, 0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0, 2)$ 。



- (1) 求抛物线的表达式 .
- (2) 求证： $\angle CAO = \angle BCO$.
- (3) 若点 P 是抛物线上的一点，且 $\angle PCB + \angle ACB = \angle BCO$ ，求直线 CP 的表达式 .

4. 倍半角问题

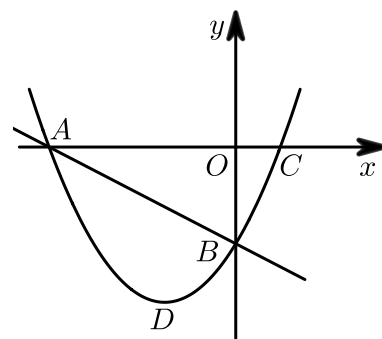
16. 如图，抛物线 $y = ax^2 + bx - 3$ 交 x 轴于点 $A(-1, 0)$ ， $B(3, 0)$ 两点，交 y 轴于点 C 。



(1) 求抛物线的解析式。

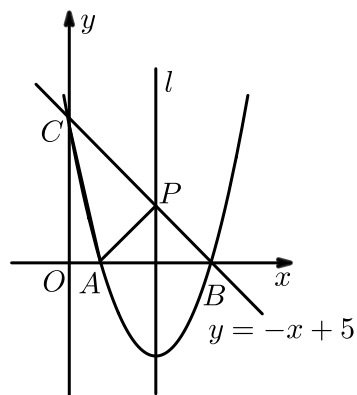
(2) 在抛物线上，找一点 N 使 $\angle NCA = 2\angle ACB$ ，求点 N 的坐标。

17. 已知，如图，在平面直角坐标系中，直线 $y = -\frac{1}{2}x - 2$ 与 x 轴交于点 A ，与 y 轴交于点 B ，抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 经过 A 、 B 两点，与 x 轴的另一个交点为 C 。



- (1) 求抛物线的函数解析式。
- (2) D 为直线 AB 下方抛物线上一动点。
- ① 连接 DO 交 AB 于点 E ，若 $DE:OE = 3:4$ ，求点 D 的坐标。
 - ② 是否存在点 D ，使得 $\angle DBA$ 的度数恰好是 $\angle BAC$ 度数2倍，如果存在，求点 D 的坐标，如果不存在，说明理由。

18. 如图，抛物线 $y = ax^2 - 6x + c$ 交 x 轴于 A, B 两点，交 y 轴于点 C 。直线 $y = -x + 5$ 经过点 B, C 。



- (1) 求抛物线的解析式。
- (2) 抛物线的对称轴 l 与直线 BC 相交于点 P ，连接 AC, AP ，判定 $\triangle APC$ 的形状，并说明理由。
- (3) 在直线 BC 上是否存在点 M ，使 AM 与直线 BC 的夹角等于 $\angle ACB$ 的 2 倍？若存在，请求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。